

SUR L'ALGÈBRICITÉ DES SÉRIES DE PUISEUX.

MICHEL HICKEL ET MICKAËL MATUSINSKI

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons à l'algèbricité d'une série de Puiseux en termes des propriétés de ses coefficients. Nous résolvons le problème de l'implicitation d'une série algébrique qui consiste à déterminer une équation annulatrice de la série à partir des coefficients de celle-ci.

1. INTRODUCTION.

Soit K un corps de caractéristique nulle et \bar{K} sa clôture algébrique. Nous considérons $K[[x]]$, l'anneau des séries formelles à coefficients dans K , et son corps de fraction $K((x))$. On désigne aussi par $K((\hat{x})) := \bigcup_{n=1}^{\infty} K((x^{1/n}))$ le corps des séries de Puiseux (formelles à coefficients dans K). D'après le théorème de Newton-Puiseux (voir par exemple [Wal78, Theorem 3.1] et [RvdD84, Proposition p.314]), une clôture algébrique de $K((x))$ est donnée par $\mathcal{P}_K := \bigcup_L L((\hat{x}))$ où L parcourt les extensions finies de K dans \bar{K} . En particulier, si $K = \bar{K}$, alors $\mathcal{P}_K = K((\hat{x}))$. Parmi les séries de Puiseux, nous nous intéressons aux séries de Puiseux algébriques, c'est-à-dire celles vérifiant une équation polynomiale avec des coefficients qui sont eux-mêmes des polynômes en x : $P(x, y) \in K[x][y]$.

Parmi les nombreux travaux concernant les séries de Puiseux algébriques [vdP93, FS09, BD13], nous nous intéressons aux questions suivantes :

- **Reconstruction d'un polynôme annulateur d'une série de Puiseux algébrique donnée.** L'algèbricité d'une série de Puiseux peut être codée par l'annulation de certains déterminants obtenus à partir des coefficients de cette série. Nous prolongeons cette approche en montrant comment reconstruire les coefficients d'un polynôme annulateur à l'aide de mineurs de ces déterminants (voir Section 3). Plus précisément, nous montrons qu'à degré borné, il existe un nombre fini de formules polynomiales universelles permettant d'effectuer cette reconstruction (voir Théorème 3.5).
- **Description des coefficients d'une série de Puiseux algébrique en fonction des coefficients d'un polynôme annulateur.** Une approche consiste à envisager que ces coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire, ce qui permet un calcul asymptotique des coefficients. Cette propriété se déduit classiquement du fait qu'une série de Puiseux algébrique est *différentiellement finie* (*D-finite*), c'est-à-dire satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients dans $K[x]$ [Com64, Sta78, Sta99, Sin80, CC86, CC87, BCS⁺07].

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13J05, 14H05 (primary), and 12Y99 (secondary).

Key words and phrases. bivariate polynomials, algebraic Puiseux series, implicitization, closed form for coefficients.

Une autre approche consiste à déterminer une formule close à partir des coefficients d'un polynôme annulateur. Dans cette direction, P. Flajolet et M. Soria (voir la thèse d'habilitation de M. Soria (1990) et [FS]) ont proposé une formule dans le cas d'une série satisfaisant une équation hensélienne réduite (voir la Définition 2.2 pour la terminologie) à coefficients complexes. Cette formule s'étend à des coefficients dans K quelconque via un travail d'Henrici [Hen64].

Ici nous complétons cette approche dans le cas d'une série de Puiseux satisfaisant une équation polynomiale générale $P(x, y) = 0$, en montrant que les coefficients de cette série peuvent se calculer par la formule de Flajolet-Soria appliquée à un polynôme naturellement déduit de P (voir Section 4).

2. PRÉLIMINAIRES

Nous noterons $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_{>0}$. Pour tout ensemble \mathcal{E} , nous écrivons $|\mathcal{E}| := \text{Card}(\mathcal{E})$. Pour tout vecteur d'entiers $K = (k_1, \dots, k_n)$, on note $K! := \prod_{i=1}^n k_i!$, $|K| := \sum_{i=1}^n k_i$ et $\|K\| := \sum_{i=1}^n i k_i$. On désignera l'application partie entière d'un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ par $\lfloor q \rfloor$.

Soit $\tilde{y}_0 = \sum_{n \geq 1} \tilde{c}_n x^{n/p} \in K((\hat{x}))$, $\tilde{c}_{n_0} \neq 0$, une série de Puiseux. On écrit

$$\tilde{y}_0 = x^{(n_0-1)/p} \sum_{n \geq n_0} c_n x^{n/p} = x^{(n_0-1)/p} \tilde{z}_0 \text{ avec } c_1 \neq 0$$

La série \tilde{y}_0 est racine d'un polynôme $\tilde{P}(x, y) = \sum_{i,j} \tilde{a}_{i,j} x^i y^j$ de degré d_y en y si et seulement si la série la série $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n$ est racine de $x^m \tilde{P}(x^p, x^{n_0-1}y)$, ce dernier étant un polynôme pour $m = \max\{0; (1 - n_0)d_y\}$. L'existence d'un polynôme \tilde{P} annulant \tilde{y}_0 est équivalente à celle d'un polynôme $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ annulant y_0 , tel que, pour (i, j) appartenant au support de P , on ait $i \equiv (n_0 - 1)j \pmod{p}$ si $n_0 - 1 \geq 0$, et $i \equiv (1 - n_0)(d_y - j) \pmod{p}$ sinon. Ainsi l'algébricité de \tilde{y}_0 équivaut elle à celle de y_0 mais *avec contraintes*. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.1. Soient deux suites finies \mathcal{F} et \mathcal{G} strictement croissantes de couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ordonnés anti-lexicographiquement :

$$(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2) \Leftrightarrow j_1 < j_2 \text{ ou } (j_1 = j_2 \text{ et } i_1 \leq i_2)$$

On suppose de plus que $\mathcal{F} \geq (0, 1) > \mathcal{G} > (0, 0)$ (ainsi les éléments de \mathcal{G} sont des couples du type $(i, 0)$, $i \in \mathbb{N}^*$, et ceux de \mathcal{F} du type (i, j) , $j \geq 1$). On dit qu'une série $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K((x))$, $c_1 \neq 0$, est **algébrique relativement à $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$** s'il existe un polynôme

$$P(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}} a_{i,j} x^i y^j \in K[x, y] \text{ tel que } P(x, y_0) = 0.$$

Flajolet et Soria (voire la thèse d'habilitation de M. Soria (1990) et [FS]) ont donné une formule close pour le calcul des coefficients d'une série formelle solution d'une équation hensélienne réduite au sens suivant :

Définition 2.2. On appelle **équation hensélienne réduite** une équation du type :

$$y = Q(x, y) \text{ avec } Q(x, y) \in K[x, y]$$

tel que $Q(0, 0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $Q(x, 0) \neq 0$.

Théorème 2.3 (Formule de Flajolet-Soria). *Soit $y = Q(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ une équation hensélienne réduite. Alors les coefficients de l'unique solution $\sum_{n \geq 1} c_n x^n$ sont donnés par :*

$$c_n = \sum_{m=1}^{2n-1} \frac{1}{m} \sum_{\substack{|\underline{k}|=m, \|\underline{k}\|_1=n, \|\underline{k}\|_2=m-1}} \frac{m!}{\prod_{i,j} k_{i,j}!} \prod_{i,j} a_{i,j}^{k_{i,j}}$$

où $\underline{k} = (k_{i,j})_{i,j}$, $|\underline{k}| = \sum_{i,j} k_{i,j}$, $\|\underline{k}\|_1 = \sum_{i,j} i k_{i,j}$ et $\|\underline{k}\|_2 = \sum_{i,j} j k_{i,j}$.

Remarque 2.4. Plaçons nous dans le cas particulier où les coefficients de Q vérifient $a_{0,j} = 0$ pour tout j . Pour tout \underline{k} tel que $|\underline{k}| = m$ et $\prod_{i,j} a_{i,j}^{k_{i,j}} \neq 0$, on a donc $\|\underline{k}\|_1 \geq m$. Donc, pour avoir $\|\underline{k}\|_1 = n$, on doit avoir $m \leq n$. La formule de Flajolet-Soria peut s'écrire :

$$c_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sum_{\substack{|\underline{k}|=m, \|\underline{k}\|_1=n, \|\underline{k}\|_2=m-1}} \frac{m!}{\prod_{i,j} k_{i,j}!} \prod_{i,j} a_{i,j}^{k_{i,j}}$$

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.5. *Soient $P(x, y) = a_d y^d + \dots + a_0$ et $Q(x, y) = b_{d'} y^{d'} + \dots + b_0$ deux polynômes de $K[x][y]$ avec $d = \deg_y P \geq d' = \deg_y Q$. Soient $S(x, y)$ et $R(x, y)$ les quotient et reste dans $K(x)[y]$ de la division euclidienne de P par Q . Alors il existe un entier $k \leq d - d' + 1$ tel que la relation $(b_{d'})^k P = Q(b_{d'})^k S + (b_{d'})^k R$ soit polynomiale dans $K[x][y]$ et les coefficients dans $K[x]$ de $(b_{d'})^k S$ et $(b_{d'})^k R$ sont des polynômes homogènes en les a_i, b_j de degré respectif k et $k + 1$.*

Preuve. On procède par récurrence sur d . Pour $d = 1$, si $d' = 0$, le résultat est évident. Si $d' = 1$, on calcule :

$$a_1 y + a_0 = (b_1 y + b_0) \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1}$$

Donc $k = 1$, et le degré en les a_i, b_j de $b_1 S$ vaut 1, et celui de $b_1 R$ vaut 2.

Supposons la propriété vraie pour tout polynôme \tilde{P} de degré $\tilde{d} < d$. On considère $P(x, y) = a_d y^d + \dots + a_0$, $a_d \neq 0$ et $Q(x, y) = b_{d'} y^{d'} + \dots + b_0$, $b_{d'} \neq 0$, avec $d' \leq d$. Nous effectuons la première étape de la division euclidienne :

$$(b_{d'} y^{d'} + \dots + b_0) \frac{a_d y^d + \dots + a_0}{b_{d'}} + \frac{a_{d-1} b_{d'} - a_d b_{d'-1}}{b_{d'}} y^{d-1} + \dots + \frac{a_{d-d'} b_{d'} - a_d b_0}{b_{d'}} y^{d-d'} + \dots + a_0$$

Si le reste $\frac{a_{d-1} b_{d'} - a_d b_{d'-1}}{b_{d'}} y^{d-1} + \dots + a_0$ est de degré inférieur à d' , la division est terminée.

On a, comme précédemment, $k = 1$ et les degrés en les a_i, b_j , de $(b_{d'} S)$ et $(b_{d'} R)$ valent respectivement 1 et 2. Sinon, nous sommes ramenés à diviser $\tilde{P} := \frac{a_{d-1} b_{d'} - a_d b_{d'-1}}{b_{d'}} y^{d-1} + \dots + a_0$ de degré au plus $d - 1$ par $Q(x, y)$ de degré $d' \leq d - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique, et on en déduit le résultat souhaité. \square

3. CARACTÉRISER L'ALGÈBRICITÉ D'UNE SÉRIE FORMELLE

Nous reprenons et prolongeons ici les résultats de [Wil19]. On suppose donnée une série $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K((x))$ avec $c_1 \neq 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous considérons le développement multinomial de y_0^j , que nous notons :

$$y_0^j = \sum_{n \geq 1} c_n^{(j)} x^n$$

Bien entendu, on a $c_n^{(j)} = 0$ pour $n < j$ et $c_1^{(j)} = c_1^j \neq 0$. Pour $j = 0$, on pose $y_0^0 = 1$. Remarquons que pour tout n et tout j , $c_n^{(j)}$ est un polynôme homogène à coefficients entiers positifs de degré j en les c_m pour $m \leq n - j + 1$.

Définition 3.1. (1) Etant donné un couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on appelle **vecteur de Wilczynski** $V_{i,j}$ le vecteur infini ayant pour composantes :

- si $j \geq 1$, une suite de i zéros suivie des coefficients du développement multinomial de y_0^j :

$$V_{i,j} := (0, \dots, 0, c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \dots, c_n^{(j)}, \dots)$$

- sinon, 1 en i ème position et 0 pour les autres coefficients

$$V_{i,0} := (0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

(2) Soient deux suites \mathcal{F} et \mathcal{G} comme dans la Définition 2.1. On associe à \mathcal{F} et \mathcal{G} la **matrice (infinie) de Wilczynski** constituée des vecteurs $V_{i,j}$ correspondants présentés en colonnes :

$$M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} := (V_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$$

On définit aussi la **matrice de Wilczynski réduite**, $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{\text{red}}$: c'est la matrice déduite de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ en supprimant les vecteurs colonnes indicés dans \mathcal{G} , et en supprimant aussi les lignes correspondantes (suppression de la ligne i pour tout $(i, 0) \in \mathcal{G}$). Cela revient exactement à supprimer les lignes comportant le coefficient 1 pour un des vecteurs de Wilczynski indicés dans \mathcal{G} .

Lemme 3.2 (Wilczynski). *La série y_0 est algébrique relativement à $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ si et seulement si les mineurs d'ordre $|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}|$ de la matrice de Wilczynski $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ sont tous nuls, ou encore si et seulement si les mineurs d'ordre $|\mathcal{F}|$ de la matrice de Wilczynski réduite $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{\text{red}}$ sont tous nuls.*

Preuve. Etant donné un polynôme non trivial $P(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}} a_{i,j} x^i y^j$, on calcule :

$$\begin{aligned} P(x, y_0) &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} a_{i,j} x^i \left(\sum_{n \geq 1} c_n^{(j)} x^n \right) + \sum_{(i,0) \in \mathcal{G}} a_{i,0} x^i \\ &= M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \cdot (a_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}} \end{aligned}$$

où les composantes du vecteur infini ainsi obtenu représentent les coefficients respectifs obtenus en regroupant le développement de $P(x, y_0)$ selon les puissances de x croissantes. La série y_0 est racine de P si et seulement si le vecteur infini ainsi obtenu est le vecteur nul, ce qui signifie que le rang de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ est strictement inférieur à $|\mathcal{F} \cup \mathcal{G}|$, le nombre de vecteurs colonnes de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$. Cette condition comme en dimension finie est caractérisée par l'annulation des mineurs de taille maximale.

Remarquons maintenant que, dans le vecteur infini $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \cdot (a_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}}$, si on supprime

les composantes numéro i pour $(i, 0) \in \mathcal{G}$, alors on obtient exactement le vecteur infini $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red} \cdot (a_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F}}$. L'annulation de celui-ci signifie bien que le rang de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ est strictement inférieur à $|\mathcal{F}|$. Réciproquement, si les colonnes de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ sont liées pour certains \mathcal{F} et \mathcal{G} , on note $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F}}$ une suite correspondante de coefficients d'une combinaison linéaire non triviale nulle des vecteurs colonnes. Il suffit alors de remarquer que les coefficients restants $a_{k,0}$ pour $(k, 0) \in \mathcal{G}$ sont obtenus chacun séparément de manière unique comme suit :

$$(1) \quad a_{k,0} = - \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}, i < k} a_{i,j} c_{k-i}^{(j)}$$

□

Nous nous intéressons au problème d'implication des séries algébriques : à degré borné en x et en y , connaissant l'expression d'une série algébrique, peut-on en construire un polynôme annulateur ? si oui comment ?

Définition 3.3. On considère une matrice de Wilczynski réduite $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ associée à deux suites \mathcal{F} et \mathcal{G} de couples (i, j) comme dans 2.1. On appellera **polynôme de Wilczynski** tout polynôme en les coefficients c_n de y_0 obtenu comme mineur de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$. On notera un tel polynôme de Wilczynski par $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$, où $\underline{l} := ((i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l))$ est une sous-suite de \mathcal{F} indiquant les l colonnes de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$, et $\underline{k} := (k_1, k_2, \dots, k_l)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels positifs indiquant les l lignes de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ à partir desquels on forme le mineur de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$. On a $l \in \mathbb{N}^*$, $l \leq |\mathcal{F}|$, l étant l'ordre de ce mineur, qu'on appellera aussi **ordre** du polynôme de Wilczynski $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$. Remarquons aussi qu'un polynôme de Wilczynski $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$ est homogène de degré égal à $\sum_{(i,j) \in \underline{l}, c_k^{(j)} \neq 0} j$ (en effet, les coefficients de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ vérifient : $c_k^{(j)} \equiv 0 \Leftrightarrow k < j$). Par convention, nous appellerons **polynôme de Wilczynski d'ordre 0** tout polynôme constant non nul.

D'après 3.2, l'algèbricité de y_0 pour certains \mathcal{F} et \mathcal{G} est équivalente à l'annulation de tous les $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$ d'ordre $l = |\mathcal{F}|$, pour les valeurs spécifiques des c_n données comme coefficients de y_0 .

Exemple 3.4. Soit $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K((x))$ une série avec $c_1 \neq 0$. Nous envisageons les conditions pour que y_0 soit racine d'un polynôme du type :

$$P(x, y) = a_{2,0}x^2 + a_{2,1}x^2y + (a_{0,2} + a_{2,2}x^2)y^2$$

Ainsi, $\mathcal{F} = \{(2, 1), (0, 2), (2, 2)\}$ et $\mathcal{G} = \{(2, 0)\}$. La matrice de Wilczynski correspondante est :

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_1^2 & 0 \\ 0 & c_1 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & c_2^2 + 2 c_1 c_3 & c_1^2 \\ 0 & c_3 & 2 c_1 c_4 + 2 c_2 c_3 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ 0 & c_4 & 2 c_2 c_4 + c_3^2 + 2 c_1 c_5 & c_2^2 + 2 c_1 c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

et la matrice réduite est :

$$M^{red} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 & 0 \\ c_2 & c_2^2 + 2 c_1 c_3 & c_1^2 \\ c_3 & 2 c_1 c_4 + 2 c_2 c_3 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ c_4 & 2 c_2 c_4 + c_3^2 + 2 c_1 c_5 & c_2^2 + 2 c_1 c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Nous donnons les 4 premiers polynômes de Wilczynski d'ordre maximal 3 non triviaux, égaux à des mineurs 3x3 de M^{red} . Ici on a donc $\underline{l} = \mathcal{F}$ en indice de $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$:

$$\begin{aligned} Q_{\underline{k}, \mathcal{F}} &:= -2 c_1^2 (c_2^3 - 2 c_3 c_1 c_2 + c_1^2 c_4) \text{ pour } \underline{k} = (2, 3, 4) \\ Q_{\underline{k}, \mathcal{F}} &:= -c_1 (c_2^4 - 3 c_1^2 c_3^2 + 2 c_1^3 c_5) \text{ pour } \underline{k} = (2, 3, 5) \\ Q_{\underline{k}, \mathcal{F}} &:= -2 c_1^2 (-c_4 c_2^2 - 2 c_1 c_4 c_3 + c_2 c_3^2 + 2 c_1 c_2 c_5) \text{ pour } \underline{k} = (2, 4, 5) \\ Q_{\underline{k}, \mathcal{F}} &:= 8 c_2 c_1^2 c_4 c_3 + c_2^4 c_3 - 2 c_2^2 c_3^2 c_1 - 4 c_1^2 c_2^2 c_5 - 3 c_1^2 c_3^3 + 2 c_3 c_1^3 c_5 - 2 c_1^3 c_4^2 \\ &\text{pour } \underline{k} = (3, 4, 5) \end{aligned}$$

La série y_0 est racine d'un polynôme $P(x, y)$ comme ci-dessus si et seulement tous les polynômes de Wilczynski d'ordre 3 sont nuls. Cela implique notamment que :

$$c_4 = -\frac{c_2(c_2^2 - 2 c_1 c_3)}{c_1^2} \text{ et } c_5 = -\frac{c_2^4 - 3 c_1^2 c_3^2}{2 c_1^3}$$

Théorème 3.5. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux suites finies de couples comme dans 2.1. On pose $d_y := \max\{j, (i, j) \in \mathcal{F}\}$ et $d_x := \max\{i, (i, j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}\}$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et un nombre fini de polynômes homogènes $a_{i,j}^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N]$, $(i, j) \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, $\lambda \in \Lambda$, avec degré total $\deg a_{i,j}^{(\lambda)} \leq \frac{1}{2} d_y (d_y + 1)(d_x + 1) - 1$ pour $(i, j) \in \mathcal{F}$, et $\deg a_{i,0}^{(\lambda)} \leq \frac{1}{2} d_y (d_y + 1)(d_x + 1) - 1 + i$ pour $(i, 0) \in \mathcal{G}$, tels que, pour tout $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K[[x]]$ avec $c_1 \neq 0$ série algébrique relativement à $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que le polynôme

$$P(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} a_{i,j}^{(\lambda)}(c_1, \dots, c_N) x^i y^j + \sum_{(i,0) \in \mathcal{G}} a_{i,0}^{(\lambda)}(c_1, \dots, c_N) x^i \in K[x, y]$$

est annulateur pour y_0 .

On donne dans un premier temps le processus de reconstruction. On montrera ensuite sa finitude.

Preuve. Soit $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K[[x]]$ avec $c_1 \neq 0$ algébrique relativement à $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Nous montrons comment reconstruire un polynôme annulateur $P(x, y)$ de y_0 .

Soit $Q(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} b_{i,j} x^i y^j + \sum_{(i,0) \in \mathcal{G}} b_{i,0} x^i$ un polynôme annulateur de y_0 . Nous procédons par récurrence sur m le nombre de coefficients $b_{i,j}$ non nuls pour $(i, j) \in \mathcal{F}$. Si $m = 1$, $Q(x, y)$ est de la forme :

$$Q(x, y) = b_{i,j} x^i y^j + \sum_{(i,0) \in \mathcal{G}} b_{i,0} x^i$$

avec $b_{i,j} \neq 0$. On doit donc avoir $b_{n,0} = 0$ pour $n < i + j$, et la série y_0 vérifie :

$$\sum_{(n,0) \in \mathcal{G}} b_{n,0} x^n = -b_{i,j} x^i y_0^j = \sum_{n \geq i} -b_{i,j} c_{n-i}^{(j)} x^n$$

Le critère 3.2 signifie ici que les mineurs d'ordre 1 de $M_{(i,j),\mathcal{G}}^{red}$, égaux à $c_{n-i}^{(j)}$, pour $(n,0) \notin \mathcal{G}$, sont tous nuls. On fixe le coefficient $a_{i,j}$ quelconque dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$: c'est un polynôme de Wilczynski constant. Les autres coefficients sont alors déterminés de manière unique conformément à la relation (1) par l'équation :

$$a_{n,0} := -a_{i,j}c_{n-i}^{(j)}, \quad (n,0) \in \mathcal{G}$$

Le coefficient $a_{n,0}$ est ainsi un polynôme de degré j en les c_k , $k \leq n - i - j + 1$, qui vérifie bien $j \leq d_y \leq \frac{1}{2}d_y(d_y + 1)(d_x + 1) \leq \frac{1}{2}d_y(d_y + 1)(d_x + 1) - 1 + n$.

Considérons maintenant le cas où un polynôme annulateur $Q(x,y)$ de y_0 a $m \geq 2$ termes non nuls. Il existe donc une sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, les indices des coefficients non nuls de $Q(x,y)$, avec $|\mathcal{F}'| = m$ et tels que les mineurs d'ordre m de $M_{\mathcal{F}',\mathcal{G}}^{red}$ sont tous nuls. Supposons qu'il existe un mineur d'ordre $m - 1$ de cette matrice, c'est-à-dire un polynôme de Wilczynski $Q_{\underline{k}_0, \underline{L}_0}$, qui soit non nul. Notons $M_{\underline{k}_0, \underline{L}_0}$ la matrice carrée dont ce mineur est le déterminant, et $C_{\underline{k}_0, (i_0, j_0)}$ la p_0 -ième colonne supprimée pour former ce mineur. On a un système de Cramer :

$$M_{\underline{k}_0, \underline{L}_0} \cdot (b_{i,j})_{(i,j) \neq (i_0, j_0)} = -b_{i_0, j_0} C_{\underline{k}_0, (i_0, j_0)}$$

Nous construisons des coefficients $a_{i,j}$ vérifiant :

$$M_{\underline{k}_0, \underline{L}_0} \cdot (a_{i,j})_{(i,j) \neq (i_0, j_0)} = -a_{i_0, j_0} C_{\underline{k}_0, (i_0, j_0)}$$

en prenant $a_{i_0, j_0} := (-1)^{p_0} Q_{\underline{k}_0, \underline{L}_0}$ et en calculant les autres $a_{i,j}$ par la règle de Cramer. Les $a_{i,j}$ sont ainsi des mineurs d'ordre $m - 1$ de $M_{\mathcal{F}',\mathcal{G}}^{red}$, et donc au signe près des polynômes de Wilczynski $Q_{\underline{k}_0, \underline{L}}$ d'ordre $m - 1$. Si $\underline{k}_0 = (k_{0,1}, \dots, k_{0,m-1})$, posons :

$$(2) \quad N_{y_0} := k_{0,m-1}$$

Les $a_{i,j}$ sont des polynômes homogènes de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{N_{y_0}}]$. Le degré d'un polynôme de Wilczynski $Q_{\underline{k}_0, \underline{L}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \deg Q_{\underline{k}_0, \underline{L}} &= \sum_{(i,j) \in \underline{L}, c_k^{(j)} \neq 0} j \\ &\leq -1 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}} j \\ &\leq -1 + (d_x + 1) \sum_{j=1}^{d_y} j \\ &= \frac{1}{2}d_y(d_y + 1)(d_x + 1) - 1 \end{aligned}$$

Les coefficients $a_{n,0}$ pour $(n,0) \in \mathcal{G}$ sont obtenus via les relations (1) :

$$a_{n,0} = - \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}, n > i} a_{i,j} c_{n-i}^{(j)}$$

Sachant que $c_{n-i}^{(j)} \neq 0 \Rightarrow n - i \geq j$, et que dans ce cas $\deg c_{n-i}^{(j)} = j$, on en déduit que $\deg a_{n,0} \leq n + \max_{(i,j) \in \mathcal{F}} (\deg a_{i,j})$ comme souhaité. Le polynôme $P(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}} a_{i,j} x^i y^j$

est proportionnel à Q , donc annule y_0 .

Supposons maintenant que tous les mineurs d'ordre $m - 1$ soient nuls. Donc, en se restreignant à une sous-famille $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$ de $m - 1$ vecteurs parmi les m vecteurs de Wilczynski $V_{i,j}$, $(i,j) \in \mathcal{F}'$, avec la même famille \mathcal{G} , on a une nouvelle matrice de Wilczynski réduite, à $m - 1$ colonnes, dont tous les mineurs d'ordre $m - 1$ sont nuls. Donc y_0 est algébrique relativement à $(\mathcal{F}'', \mathcal{G})$. Par récurrence sur m , on a ainsi reconstruit un polynôme $P(x,y)$ annulateur de y_0 . \square

Pour obtenir le Théorème 3.5, il suffit maintenant de montrer qu'il existe une borne uniforme $N = N_{d_x, d_y}$ pour la profondeur dans $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{red}$ à laquelle on obtient le procédé de reconstruction, c'est-à-dire la profondeur à laquelle on rencontre un premier mineur non nul. Nous obtenons ceci dans les deux lemmes suivants.

Lemme 3.6. *Soient $d_x, d_y \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier N_{d_x, d_y} tel que pour toute série $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K[[x]]$, avec $c_1 \neq 0$, vérifiant une relation $P(x, y_0) = 0$ avec $P(x, y) \in K[x, y]$, $\deg_x P \leq d_x$, $\deg_y P \leq d_y$, et tout polynôme $Q(x, y) \in K[x, y]$, $\deg_x Q \leq d_x$, $\deg_y Q \leq d_y$, vérifiant $Q(x, y_0) \neq 0$, on ait $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq N_{d_x, d_y}$.*

Preuve. Nous procédons par récurrence sur d_y , pour d_x quelconque. Si $d_y = 1$, on considère $P(x, y) = a_1 y + a_0$ avec $a_1 y_0 + a_0 = 0$. Soit $Q(x, y) = b_1 y + b_0$ tel que $Q(x, y_0) = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{a_1} \neq 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \text{ord}_x Q(x, y_0) &= \text{ord}_x(b_0 a_1 - b_1 a_0) - \text{ord}_x(a_1) \\ &\leq \deg_x(b_0 a_1 - b_1 a_0) \\ &\leq 2d_x \end{aligned}$$

On peut ainsi prendre $N_{d_x, 1} = 2d_x$.

Supposons la propriété vraie pour tout $d'_y < d_y$ avec un entier N_{d_x, d'_y} (d_x quelconque). Nous procédons par récurrence sur $d_Q := \deg_y Q \leq d_y$. Si $d_Q = 1$, on écrit $Q(x, y) = b_1 y + b_0$ et on peut supposer P de degré $\deg_y P = d_y$. On effectue la division euclidienne de P par Q . D'après le Lemme 2.5, il existe $k \leq d_y$ tel que la relation suivante soit dans $K[x][y]$:

$$(b_1)^k P = Q(b_1)^k S + (b_1)^k R, \quad \deg_y[(b_1)^k R] \leq 0$$

En évaluant pour $y = y_0$, on obtient :

$$0 = Q(x, y_0) (b_1)^k S(x, y_0) + (b_1)^k R$$

Si $(b_1)^k R \neq 0$, on obtient d'après le Lemme 2.5 :

$$\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq \text{ord}_x[(b_1)^k R] \leq \deg_x[(b_1)^k R] \leq (k+1)d_x \leq (d_y+1)d_x$$

Si $(b_1)^k R = 0$, nécessairement $(b_1)^k S(x, y_0) = 0$ avec $\deg_y[(b_1)^k S] = d_y - 1$ et avec des coefficients polynômes en x de degré inférieur à $kd_x \leq d_y d_x$. Par hypothèse de récurrence sur d_y , $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq N_{d_x, d_y-1}$. En tout cas, $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq \max\{N_{d_x, d_y-1}, (d_y+1)d_x\}$ si $\deg_y Q = 1$.

Nous considérons maintenant $d_Q \geq 2$ et nous supposons la propriété vraie pour tout $d'_Q < d_Q$ avec un entier N_{d_x, d_y, d'_Q} . Si $d_Q < \deg_y P$, on peut supposer que $\deg_y P = d_y$, et on effectue la division euclidienne de P par Q . D'après le Lemme 2.5, il existe $k \leq d_y - d_Q + 1$ tel que la relation suivante soit dans $K[x][y]$:

$$(b_{d_Q})^k P = Q(b_{d_Q})^k S + (b_{d_Q})^k R, \quad \deg_y[(b_{d_Q})^k R] \leq d_Q - 1$$

En évaluant pour $y = y_0$, on obtient :

$$0 = Q(x, y_0) (b_{d_Q})^k S(x, y_0) + (b_{d_Q})^k R(x, y_0)$$

Si $(b_{d_Q})^k R(x, y_0) \neq 0$, puisque $\deg_y[(b_{d_Q})^k R] \leq d_Q - 1$ et puisque ses coefficients polynômes en x sont de degré inférieur à $(k+1)d_x \leq (d_y - d_Q + 2)d_x$ (Lemme 2.5), on obtient par hypothèse de récurrence sur d_Q :

$$\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq \text{ord}_x[(b_{d_Q})^k R(x, y_0)] \leq N_{(d_y+1)d_x, d_y, d_Q-1}$$

Si $(b_{d_Q})^k R = 0$, nécessairement $(b_{d_Q})^k S(x, y_0) = 0$ avec $\deg_y[(b_1)^k S] = d_y - d_Q \leq d_y - 2$ et des coefficients polynômes en x de degré inférieur à $kd_x \leq (d_y - d_Q + 1)d_x$. Par hypothèse de récurrence, $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq N_{d_y, d_x, d_y - 1}$.

Supposons maintenant que $d_Q \geq \deg_y P =: d_P$. On peut donc supposer que $d_Q = d_y \geq d_P$ et on écrit $P(x, y) = a_{d_P} y^{d_P} + \dots + a_0$. Nous effectuons la division euclidienne de Q par P . D'après le Lemme 2.5, il existe $k \leq d_y - d_P + 1$ tel que la relation suivante soit dans $K[x][y]$:

$$(a_{d_P})^k Q = P \cdot (a_{d_P})^k S + (a_{d_P})^k R, \quad \deg_y[(a_{d_P})^k R] \leq d_P - 1$$

En évaluant pour $y = y_0$, on obtient :

$$(a_{d_P})^k Q(x, y_0) = (a_{d_P})^k R(x, y_0) \neq 0$$

Puisque $\deg_y[(a_{d_P})^k R] \leq d_P - 1 \leq d_y - 1$ avec des coefficients polynômes en x de degré inférieur à $(k + 1)d_x \leq (d_y - d_P + 2)d_x$, on applique l'hypothèse de récurrence sur d_Q et on obtient :

$$\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq k \text{ord}_x a_{d_P} + \text{ord}_x Q(x, y_0) \leq \text{ord}_x[(a_{d_P})^k R(x, y_0)] \leq N_{(d_y + 1)d_x, d_y, d_y - 1}$$

□

Lemme 3.7. Soit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Si y_0 n'est pas algébrique relativement à $(\mathcal{F}', \mathcal{G})$, on note $l := |\mathcal{F}'|$ et $p := \min\{k_l \mid Q_{\underline{k}, \mathcal{F}'} \neq 0, \underline{k} = (k_1, \dots, k_l)\}$. Alors, pour tout polynôme $Q(x, y) =$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}} b_{i,j} x^i y^j, \text{ on a :}$$

$$\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq p \leq N_{d_x, d_y}$$

et la valeur p est atteinte pour un certain polynôme Q_0 .

Preuve. Par définition de p , pour tout $\underline{k} = (k_1, \dots, k_l)$ avec $k_l < p$, on a $Q_{\underline{k}, \mathcal{F}'} = 0$. Cela signifie que le rang des vecteurs colonnes $V_{i,j,p-1}$ restriction de $M_{\mathcal{F}', \mathcal{G}}^{\text{red}}$ jusqu'à la ligne $p - 1$ est strictement inférieur à $l = |\mathcal{F}'|$. Il existe des coefficients $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}}$ non tous nuls tels que $\sum_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}} a_{i,j} V_{i,j,p-1} = (0)$, ce qui équivaut à l'annulation des $p - 1$ premiers termes de

$$Q_0(x, y_0) := \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}} a_{i,j} x^i (y_0)^j. \text{ Ainsi, } \text{ord}_x Q_0(x, y_0) \geq p, \text{ et donc } p \leq N. \text{ D'autre part,}$$

toujours par définition de p , les vecteurs colonnes jusqu'à la ligne p sont quant à eux de rang $l = |\mathcal{F}'|$. Toute combinaison linéaire non triviale est non nulle, donc $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq p$ pour tout $Q(x, y) := \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}} b_{i,j} x^i y^j$. □

On obtient le Théorème 3.5 via l'existence d'un entier $N = N_{d_x, d_y}$ comme en 3.6 et 3.7 en considérant pour une série algébrique y_0 donnée une famille $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}$ minimale parmi les familles telles que y_0 soit algébrique relativement à $(\mathcal{F}'', \mathcal{G})$. Ainsi, l'entier N_{y_0} de (2) est toujours majoré par $N = N_{d_x, d_y}$. □

Construction de coefficients $a_{i,j}^{(l_0)}$ pour y_0 donnée.

Soit y_0 algébrique relativement à $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme dans 2.1. Soit $N = N_{d_x, d_y}$ comme dans 3.6. On note M_N la matrice constituée des N premières lignes de $M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{\text{red}}$. Soit r le rang de M , et $m := r + 1$. Les mineurs de M d'ordre m sont tous nuls et il existe un mineur d'ordre $m - 1 = r$ non nul. Deux cas se présentent. Si $r = 0$, on choisit $(i, j) \in \mathcal{F}$ et on fixe le coefficient $a_{i,j} = 1$ et $a_{l,m} = 0$ pour $(l, m) \in \mathcal{F}$, $(l, m) \neq (i, j)$. On détermine alors les coefficients $a_{i,0}$ pour $(i, 0) \in \mathcal{G}$ par les relations (1). Les polynômes P ainsi obtenus sont

tous annulateurs de y_0 .

Si $r \geq 1$, on considère tous les polynômes de Wilczynski $Q_{\underline{k}, \underline{l}}$ d'ordre r non nuls évalués en c_1, \dots, c_N . Chacun d'eux permet de reconstruire des coefficients $a_{i,j}^{(l)}$, $(i, j) \in \mathcal{F}$, puis des coefficients $a_{i,0}$, $(i, 0) \in \mathcal{G}$, via (1). Les polynômes $P^{(l)}$ correspondants sont annulateurs de y_0 si et seulement si $\text{ord}_x P^{(l)} \left(x, \sum_{k=1}^N c_k x^k \right) > N$.

Exemple 3.8. Nous reprenons l'Exemple 3.4, et remarquons que, pour $\underline{k} = (2, 3)$ et pour $\underline{l} = ((2, 1), (2, 2))$, on a :

$$Q_{\underline{k}, \underline{l}} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_1^2 \end{vmatrix} = c_1^3 \neq 0$$

On pose donc $a_{0,2} := (-1)^2 c_1^3 = c_1^3$ et, par la règle de Cramer :

$$\begin{cases} a_{2,1} & := & (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 \cdot c_1 \cdot c_2 & 0 \\ c_2^2 + 2 c_1 c_3 & c_1^2 \end{vmatrix} = -2c_1^3 c_2 \\ a_{2,2} & := & (-1)^3 \begin{vmatrix} c_1 & 2 \cdot c_1 \cdot c_2 \\ c_2 & c_2^2 + 2 c_1 c_3 \end{vmatrix} = c_1 (c_2^2 - 2c_1 c_3) \end{cases}$$

On déduit des formules (1) :

$$a_{2,0} = -a_{2,1} \cdot 0 - a_{0,2} \cdot c_1^2 - a_{2,2} \cdot 0 = -c_1^5$$

Un polynôme annulateur d'une série $y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K((x))$, $c_1 \neq 0$, algébrique relativement à $\mathcal{F} = ((2, 1), (0, 2), (2, 2))$ et à $\mathcal{G} = (2, 0)$ est :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -c_1^5 x^2 - 2c_1^3 c_2 x^2 y + c_1^3 y^2 + c_1 (c_2^2 - 2c_1 c_3) x^2 y^2 \\ &= c_1 \left[-c_1^4 x^2 - 2c_1^2 c_2 x^2 y + c_1^2 y^2 + (c_2^2 - 2c_1 c_3) x^2 y^2 \right] \end{aligned}$$

Remarque 3.9. (1) Nous reprenons les notations du Lemme 3.6. Soit $r(x)$ le résultant de P et Q . Dans le cas où $r(x) \neq 0$, c'est-à-dire si P et Q sont premiers entre eux, on a l'identité de Bézout suivante dans $K[x][y]$:

$$A(x, y)P(x, y) + B(x, y)Q(x, y) = r(x)$$

On évalue en $y = y_0$:

$$0 + B(x, y_0)Q(x, y_0) = r(x)$$

Donc $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq \deg_x r(x)$. Or, le résultant est un déterminant d'ordre au plus $2d_y$ dont les entrées sont des polynômes de $K[x]$ de degré au plus d_x . Donc, $\deg_x r(x) \leq 2d_x d_y$. Ainsi, dans ce cas, on a : $\text{ord}_x Q(x, y_0) \leq 2d_x d_y$.

(2) On considère le cas où y_0 est fraction rationnelle :

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{-a_0(x)}{a_1(x)} = \frac{-a_{1,0}x - \dots - a_{d_0,0}x^{d_0}}{1 + a_{1,1}x + \dots + a_{d_1,1}x^{d_1}} \\ &= \sum_{n \geq 1} c_n x^n \text{ avec } c_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, y_0 est algébrique relativement à $\mathcal{F} = \{(0, 1), \dots, (d_1, 1)\}$ et $\mathcal{G} = \{(1, 0), \dots, (d_0, 0)\}$. Les polynômes de Wilczynski d'ordre $|\mathcal{F}| = d_1 + 1$ sont tous nuls. Le polynôme de Wilczynski $Q_{\underline{k}_0, \underline{l}_0}$ d'ordre d_1 avec $\underline{k}_0 = (1, \dots, d_1)$ et $\underline{l}_0 = ((1, 1), \dots, (d_1, 1))$ est égal, au signe près, au résultant de $a_0(x)$ et $a_1(x)$, d'après [GKZ94, chap 12 (1.15) p 401].

(3) Dans cette section, le corps K peut être de caractéristique quelconque.

4. FORME CLOSE D'UNE SÉRIE ALGÈBRIQUE

On suppose ici que K est de caractéristique 0. Il s'agit ici de déterminer les coefficients d'une série algébrique en fonction des coefficients d'un polynôme annulateur. Nous considérons le polynôme suivant de degrés d_x en x et d_y en y fixés :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i=0}^{d_x} \sum_{j=0}^{d_y} a_{i,j} x^i y^j, \text{ avec } P(x, y) \in K[x, y] \\ &= \sum_{i=0}^{d_x} \pi_i(y) x^i \\ &= \sum_{j=0}^{d_y} a_j(x) y^j \end{aligned}$$

et une série formelle racine simple

$$y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n, \text{ avec } y_0 \in K[[x]], c_1 \neq 0$$

Le corps $K((x))$ est muni de la valuation x -adique ord_x .

Classiquement (e.g. [Wal78]), la résolution de $P = 0$ avec la méthode de Newton-Puiseux est algorithmique, avec deux phases :

- (1) une première phase de séparation des branches solutions illustrant le fait suivant : y_0 peut partager une partie principale avec d'autres racines de P . Cela équivaut au fait que cette partie principale est aussi partie principale d'une racine de $\partial P / \partial y$.
- (2) une seconde phase de résolution unique "automatique" : une fois que les branches sont séparées, la partie résiduelle est racine d'une équation dite de Hensel dans le contexte formel valué (y_0 vue comme série formelle algébrique), dite de type fonction implicite dans le contexte des fonctions différentiables (y_0 vue comme développement de Taylor convergent d'une fonction algébrique).

Nous donnons ci-après une version du contenu algébrique de ce processus de résolution algorithmique.

Notation 4.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $Q(x, y) = \sum_{j=0}^d a_j(x) y^j \in K((x))[y]$, on note :

- $\text{ord}_x Q := \min\{\text{ord}_x a_j(x), j = 0, \dots, d\}$
- $z_0 := 0$ et pour $k \geq 1$, $z_k := \sum_{n=1}^k c_n x^n$
- $y_k := y_0 - z_k = \sum_{n \geq k+1} c_n x^n$
- $Q_k(x, y) := Q(z_k + x^{k+1}y) = \sum_{i=i_k}^{d_k} \pi_{k,i}(y) x^i$ où $i_k = \text{ord}_x Q_k$ et $d_k := \deg_x Q_k$

Lemme 4.2. (1) La série y_0 est racine de $P(x, y)$ si et seulement si la suite $(i_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante où $i_k = \text{ord}_x P_k$.

- (2) La série y_0 est racine simple de $P(x, y)$ si et seulement si la suite $(i_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et il existe un plus petit rang k_0 tel que $i_{k_0+1} = i_{k_0} + 1$. Dans ce cas, on a $i_{k+1} = i_k + 1$ pour tout $k \geq k_0$.

Preuve . (1) Remarquons que pour tout k , $i_k \leq \text{ord}_x P_k(x, 0) = \text{ord}_x P(x, z_k)$. Ainsi, si la suite $(i_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, elle tend donc vers $+\infty$, ainsi que $\text{ord}_x P(x, z_k)$. y_0 est bien racine de $P(x, y)$. Réciproquement, supposons qu'il existe $1 \leq k < l$ tel que $i_k \geq i_l$. On applique la formule de Taylor à $P_j(x, y)$ pour $j > k$:

$$(3) \quad \begin{aligned} P_j(x, y) &= P_k(x, c_{k+1} + c_{k+2}x + \dots + x^{j-k}y) \\ &= \pi_{k,i_k}(c_{k+1})x^{i_k} + \left[\pi'_{k,i_k}(c_{k+1})c_{k+2} + \pi_{k,i_k+1}(c_{k+1}) \right] x^{i_k+1} + \dots \end{aligned}$$

Pour $1 \leq k \leq j \leq l$, $i_l \geq i_j \geq i_k$, donc $i_j = i_k$. Ainsi, $\pi_{k,i_k}(c_{k+1}) \neq 0$, d'où pour tout $j > k$, $\text{ord}_x P_j(x, 0) = \text{ord}_x P(x, z_j) = i_k$. Donc $\text{ord}_x P(x, y_0) = i_k \neq +\infty$.

(2) La série y_0 est racine double de P si et seulement si elle est racine de P et $\partial P / \partial y$. On applique la formule de Taylor pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(4) \quad \begin{aligned} P_{k+1}(x, y) &= P_k(x, c_{k+1} + xy) \\ &= \pi_{k,i_k}(c_{k+1})x^{i_k} + \left[\pi'_{k,i_k}(c_{k+1})y + \pi_{k,i_k+1}(c_{k+1}) \right] x^{i_k+1} \\ &\quad + \left[\frac{\pi''_{k,i_k}(c_{k+1})}{2}y^2 + \pi'_{k,i_k+1}(c_{k+1})y + \pi_{k,i_k+2}(c_{k+1}) \right] x^{i_k+2} + \dots \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\frac{\partial P_k}{\partial y}(x, y) = x^{k+1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_k(x, y) = \sum_{i=i_k}^{d_k} \pi'_{k,i}(y)x^i$$

On a $\pi_{k,i_k} \neq 0$ et $\pi_{k,i_k}(c_{k+1}) = 0$ (voire (1) ci-dessus), donc $\pi'_{k,i_k}(y) \neq 0$. Ainsi $\text{ord}_x \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_k = i_k - k - 1$. Nous effectuons le développement de Taylor de $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_k(c_{k+1} + xy)$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1}(x, y) = \pi'_{k,i_k}(c_{k+1})x^{i_k-k-1} + \left[\pi''_{k,i_k}(c_{k+1})y + \pi'_{k,i_k+1}(c_{k+1}) \right] x^{i_k-k} + \dots$$

Par le point (1), si y_0 est racine double de P , on doit avoir $\pi'_{k,i_k}(c_{k+1}) = 0$. Si de plus $\pi_{k,i_k+1}(c_{k+1}) \neq 0$, on aurait $i_{k+1} = i_k + 1$ et même $i_{k+j} = i_k + 1$ pour tout j par (3) : y_0 ne pourrait être racine de P . Donc, $\pi_{k,i_k+1}(c_{k+1}) = 0$ et donc $i_{k+1} \geq i_k + 2$.

Si y_0 est racine simple de P , par le point (1) il existe un plus petit entier k_0 tel que la suite $(i_k - k - 1)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est plus strictement croissante, c'est-à-dire tel que $\pi'_{k_0,i_{k_0}}(c_{k_0+1}) \neq 0$. Pour

tout $k \geq k_0$, on considère le développement de Taylor de $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k_0}(c_{k_0+1} + \dots + x^{k-k_0+1}y)$:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1}(x, y) = \pi'_{k_0,i_{k_0}}(c_{k_0+1})x^{i_{k_0}-k_0-1} + \left[\pi''_{k_0,i_{k_0}}(c_{k_0+1})c_{k_0+2} + \pi'_{k_0,i_{k_0}+1}(c_{k_0+1}) \right] x^{i_{k_0}-k_0} + \dots$$

et on obtient que :

$$(6) \quad \text{ord}_x \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1}(x, 0) = \text{ord}_x \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1} = i_{k_0} - k_0 - 1$$

Comme $\pi'_{k+1,i_{k+1}}(y) \neq 0$, on a $i_{k+1} = \text{ord}_x P_{k+1} = \text{ord}_x \left(\frac{\partial P_{k+1}}{\partial y} \right) = k + 2 + \text{ord}_x \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{k+1} = i_{k_0} + k - k_0 + 1$. Ainsi, à partir de k_0 , la suite (i_k) croît de un en un. \square

Avec les notations du Théorème 3.5 et du Lemme 4.2, l'entier k_0 représente la longueur de la partie principale dans la phase de séparation des branches. Dans le lemme suivant, nous le contrôlons à l'aide du Lemme 3.6 ou du discriminant Δ_P de P .

Lemme 4.3. *Avec les notations du Théorème 3.5, l'entier k_0 vérifie*

$$k_0 \leq N + 1$$

En particulier, si P n'a que des racines simples :

$$k_0 \leq d_x(2d_y - 1) + 1$$

Preuve. D'après le lemme 3.6, puisque $P(x, y_0) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y_0) \neq 0$, on a :

$$\text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, y_0) \leq N$$

Or, par définition, k_0 est le plus petit entier tel que $\text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, z_{k_0+1}) = \text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, z_{k_0}) = i_{k_0} - k_0 - 1$ (voire la partie (2) du lemme précédent). On a alors par (6) que $\text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, z_k) = \text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, z_{k_0}) = i_{k_0} - k_0 - 1$ pour tout $k > k_0$. Donc $\text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, y_0) = \text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, z_{k_0}) \geq k_0 - 1$. Dans le cas où P n'a que des racines simples, comme dans la Remarque 3.9, on a une majoration de $\text{ord}_x \frac{\partial P}{\partial y}(x, y_0)$ par le degré du résultant de P et $\frac{\partial P}{\partial y}$, c'est-à-dire du discriminant Δ_P de P . \square

Théorème 4.4. *Soient le polynôme suivant de $K[x, y]$ de degrés d_x en x et d_y en y fixés :*

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{d_x} \sum_{j=0}^{d_y} a_{i,j} x^i y^j = \sum_{i=0}^{d_x} \pi_i(y) x^i$$

et une série formelle racine simple

$$y_0 = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \in K[[x]], \quad c_1 \neq 0$$

Avec les notations de 4.1 et 4.2, on pose $\omega_0 := \pi'_{k_0, i_{k_0}}(c_{k_0+1}) \neq 0$. Alors, pour tout $k > k_0$:

- soit le polynôme $z_{k+1} = \sum_{n=1}^{k+1} c_n x^n$ est solution de $P(x, y) = 0$
- soit le polynôme $R_k(x, y) := \frac{P_k(x, y + c_{k+1})}{-\omega_0 x^{i_k}} = -y + Q_k(x, y)$ définit une équation :

$$y = Q_k(x, y)$$

hensélienne réduite avec $Q_k(0, y) \equiv 0$ et satisfaite par :

$$t_{k+1} := \frac{y_0 - z_{k+1}}{x^{k+1}} = c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \dots$$

Preuve. On montre par récurrence sur $k > k_0$ que $R_k(x, y) = -y + xT_k(x, y)$ avec $T_k(x, y) \in K[x, y]$. Pour $k = k_0 + 1$, d'après (4), puisque $i_{k_0+1} = i_{k_0} + 1$, on a :

$$P_{k_0+1}(x, y) = \left[\omega_0 y + \pi_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1}) \right] x^{i_{k_0}+1} + \dots$$

Comme $i_{k_0+2} = i_{k_0} + 2$, $\pi_{k_0+1, i_{k_0}+1}(y) = \omega_0 y + \pi_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1})$ s'annule en c_{k_0+2} , ainsi $c_{k_0+2} = \frac{-\pi_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1})}{\omega_0}$. Calculant $R_{k_0+1}(x, y)$, il vient :

$$R_{k_0+1}(x, y) = -y + Q_{k_0+1}(x, y) \text{ avec}$$

$$Q_{k_0+1}(x, y) = x \left[\frac{\pi''_{k, i_{k_0}}(c_{k_0+1})}{2} (y + c_{k_0+2})^2 + \pi'_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1}) (y + c_{k_0+2}) + \pi_{k_0, i_{k_0}+2}(c_{k_0+1}) \right] + x^2[\dots]$$

Donc $Q_{k_0+1}(0, y) \equiv 0$.

Supposons la propriété vraie à un rang $k > k_0 + 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} P_k(x, y) &= \omega_0(y - c_{k+1})x^{i_k} + x^{i_k+1}\tilde{T}_k(x, y) \\ &= \pi_{k, i_k}(y)x^{i_k} + \pi_{k, i_k+1}(y)x^{i_k+1} + \dots \end{aligned}$$

Comme $P_{k+1}(x, y) = P_k(x, c_{k+1} + xy)$, on a :

$$P_{k+1}(x, y) = [\omega_0 y + \pi_{k, i_k+1}(c_{k+1})]x^{i_k+1} + \pi_{k+1, i_k+2}(y)x^{i_k+2} + \dots$$

Mais $i_k + 2 = i_{k+2} > i_{k+1} = i_k + 1$. On doit donc avoir $\pi_{k+1, i_k+1}(c_{k+2}) = 0$. Ainsi $c_{k+2} = \frac{-\pi_{k, i_k+1}(c_{k+1})}{\omega_0}$. Par suite :

$$P_{k+1}(x, y) = \omega_0(y + c_{k+2})x^{i_k+1} + \pi_{k+1, i_k+2}(y)x^{i_k+2} + \dots$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} R_{k+1}(x, y) &= -y - x \frac{\pi_{k+1, i_k+2}(y + c_{k+2})}{\omega_0} + x^2[\dots] + \dots \\ &= -y + xT_{k+1}(x, y), \quad T_{k+1} \in K[x, y] \end{aligned}$$

comme souhaité.

En particulier, $Q_k(0, 0) = \frac{\partial Q_k}{\partial y}(0, 0) = 0$. L'équation $y = Q_k(x, y)$ est donc hensélienne réduite si et seulement si $Q_k(x, 0) \neq 0$, ce qui équivaut à ce que z_{k+1} ne soit pas racine de P . \square

Remarque 4.5. D'après (5), on remarque que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y_0) = \omega_0 x^{i_{k_0} - k_0 - 1} + \dots$$

Ainsi, ω_0 est le coefficient initial de $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y_0)$.

Dans le cas où y_0 est une série non polynomiale, pour le lecteur courageux, nous déduisons de 4.4 et de la formule de Flajolet-Soria 2.3 une formule close pour les coefficients de y_0 en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de P et des coefficients d'une partie initiale z_k de y_0 suffisamment longue.

Corollaire 4.6. Pour tout $k \geq k_0 + 1$, pour tout $p \geq 1$, on a :

$$c_{k+1+p} = \sum_{q=1}^p \frac{1}{q} \left(\frac{-1}{\omega_0} \right)^q \sum_{|S|=q, \|S\|_2 \geq q-1} A^S \left(\sum_{\substack{|T_S|=|S\|_2-q+1 \\ \|T_S\| = p+q-k-(q-1)(k+1)-\|S\|_1}} e_{T_S} C^{T_S} \right)$$

où $S = (s_{i,j})$, $A^S = \prod_{i=0, \dots, d_x, j=0, \dots, d_y} a_{i,j}^{s_{i,j}}$, $T_S = (t_{s,i})$, $C^{T_S} = \prod_{i=1}^{k+1} c_i^{t_{s,i}}$, et $e_{T_S} \in \mathbb{N}$ de la forme :

$$e_{T_S} = \sum_{\substack{l,m \\ n_{i,j,L}^{l,m}}} \frac{q!}{\prod_{\substack{l=1, \dots, (k+1)d_y+d_x-i_k \\ m=0, \dots, m_l}} \prod_{\substack{i=0, \dots, d_x \\ j=m, \dots, d_y}} \prod_{\substack{|L|=j-m \\ \|L\|=l+i_k-m(k+1)-i}} n_{i,j,L}^{l,m}} \prod_{m=0, \dots, m_l} \prod_{j=m, \dots, d_y} \prod_{\substack{l=1, \dots, (k+1)d_y+d_x-i_k \\ m=0, \dots, m_l}} \prod_{i=0, \dots, d_x} \prod_{\substack{|L|=j-m \\ \|L\|=l+i_k-m(k+1)-i}} \left(\frac{j!}{m! L!} \right)^{n_{i,j,L}^{l,m}}$$

où $m_l := \min \left\{ \left\lfloor \frac{l+i_k}{k+1} \right\rfloor, d_y \right\}$, $L = L_{i,j}^{l,m} = (l_{i,j,1}^{l,m}, \dots, l_{i,j,k+1}^{l,m})$, et où la somme est prise sur l'ensemble des $(n_{i,j,L}^{l,m})$ tels que :

$$\sum_{l,m} \sum_{i,j} \sum_L n_{i,j,L}^{l,m} = q \quad \text{et} \quad \sum_{l,m} \sum_{i,j} \sum_L n_{i,j,L}^{l,m} L = T_S.$$

Preuve. Nous commençons par calculer les coefficients de $\omega_0 x^{i_k} R_k$, en vue d'obtenir ceux de Q_k

$$\begin{aligned} \omega_0 x^{i_k} R_k &= P_k(x, y + c_{k+1}) \\ &= P(x, z_{k+1} + x^{k+1}y) \\ &= \sum_{i=0, \dots, d_x} a_{i,j} x^i (z_{k+1} + x^{k+1}y)^j \\ &= \sum_{i=0, \dots, d_x} a_{i,j} x^i \sum_{m=0}^j \frac{j!}{m!(j-m)!} z_{k+1}^{j-m} x^{m(k+1)} y^m \end{aligned}$$

Pour $L = (l_1, \dots, l_{k+1})$, on note $C^L := c_1^{l_1} \dots c_{k+1}^{l_{k+1}}$. On a :

$$z_{k+1}^{j-m} = \sum_{|L|=j-m} \frac{(j-m)!}{L!} C^L x^{\|L\|}$$

Donc :

$$\omega_0 x^{i_k} R_k = \sum_{m=0}^{d_y} \sum_{\substack{i=0, \dots, d_x \\ j=m, \dots, d_y}} a_{i,j} \sum_{|L|=j-m} \frac{j!}{m! L!} C^L x^{\|L\|+m(k+1)+i} y^m$$

On pose $\hat{l} = \|L\| + m(k+1) + i$, qui varie donc de $m(k+1)$ à $(k+1)(d_y - m) + m(k+1) + d_x = (k+1)d_y + d_x$. Ainsi :

$$\omega_0 x^{i_k} R_k = \sum_{\substack{m=0, \dots, d_y \\ \hat{l}=m(k+1), \dots, (k+1)d_y + d_x}} \sum_{\substack{i=0, \dots, d_x \\ j=m, \dots, d_y}} a_{i,j} \sum_{\substack{|L|=j-m \\ \|\hat{L}\|=i_k - m(k+1) - i}} \frac{j!}{m! L!} C^L x^{\hat{l}} y^m$$

Puisque $R_k = -y + Q_k(x, y)$ avec $Q_k(0, y) \equiv 0$, les coefficients de Q_k sont obtenus pour $\hat{l} = i_k + 1, \dots, (k+1)d_y + d_x$. On pose $l := \hat{l} - i_k$, $m_l := \min \left\{ \left\lfloor \frac{l+i_k}{k+1} \right\rfloor, d_y \right\}$ et on a

$$Q_k(x, y) = \sum_{\substack{l=1, \dots, (k+1)d_y + d_x - i_k \\ m=0, \dots, m_l}} b_{l,m} x^l y^m$$

avec :

$$b_{l,m} = \frac{-1}{\omega_0} \sum_{\substack{i=0, \dots, d_x \\ j=m, \dots, d_y}} a_{i,j} \sum_{\substack{|L|=j-m \\ \|\hat{L}\|=i_k - m(k+1) - i}} \frac{j!}{m! L!} C^L$$

Nous sommes en mesure d'appliquer la version 2.4 de la formule de Flajolet-Soria 2.3 pour calculer les coefficients de $t_k = c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \dots$. Ainsi, en notant $Q := (q_{l,m})$ pour $l = 1, \dots, (k+1)d_y + d_x - i_k$ et $m = 0, \dots, m_l$, on a :

$$c_{k+1+p} = \sum_{q=1}^p \frac{1}{q} \sum_{\substack{|\hat{Q}|=q, \|\hat{Q}\|_1=p, \|\hat{Q}\|_2=q-1}} \frac{q!}{\hat{Q}!} B^{\hat{Q}}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
b_{l,m}^{q_{l,m}} &= \left(\frac{-1}{\omega_0} \right)^{q_{l,m}} \left(\sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} a_{i,j} \sum_{\substack{|L|=j-m \\ \|L\|=l+i_k-m(k+1)-i}} \frac{j!}{m! L!} C^L \right)^{q_{l,m}} \\
&= \left(\frac{-1}{\omega_0} \right)^{q_{l,m}} \sum_{|M_{l,m}|=q_{l,m}, \|M_{l,m}\|_2 \geq m q_{l,m}} \frac{q_{l,m}!}{M_{l,m}!} A^{M_{l,m}} \prod_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \left(\sum_{\substack{|L|=j-m \\ \|L\|=l+i_k-m(k+1)-i}} \frac{j!}{m! L!} C^L \right)^{m_{i,j}^{l,m}} \\
&\quad \text{où } M_{l,m} = (m_{i,j}^{l,m}) \text{ pour } i = 0, \dots, d_x, j = m, \dots, d_y
\end{aligned}$$

Pour chaque $m_{i,j}^{l,m}$, on numérote les termes $\frac{j!}{m! L!} C^L$ avec $u = 1, \dots, \alpha_{i,j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\substack{|L|=j-m \\ \|L\|=l+i_k-m(k+1)-i}} \frac{j!}{m! L!} C^L \right)^{m_{i,j}^{l,m}} &= \left(\sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} \frac{j!}{m! L_u!} C^{L_u} \right)^{m_{i,j}^{l,m}} \\
&= \sum_{|N_{i,j}|=m_{i,j}^{l,m}} \frac{m_{i,j}^{l,m}!}{N_{i,j}!} \prod_{u=1}^{\alpha_{i,j}} \left(\frac{j!}{m! L_u!} \right)^{n_{i,j,u}^{l,m}} C^{\sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} L_u}
\end{aligned}$$

où $N_{i,j}^{l,m} = (n_{i,j,u}^{l,m})_{u=1,\dots,\alpha_{i,j}}$. Si on pose $U_{l,m} := \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} L_u$, on a :

$$\begin{aligned}
|U_{l,m}| &= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} |L_u| \\
&= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \left(\sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} \right) (j - m) \\
&= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} m_{i,j}^{l,m} (j - m) \\
&= \|M_{l,m}\|_2 - m q_{l,m}
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\|U_{l,m}\| &= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} \|L_u\| \\
&= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \left(\sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} \right) (l + i_k - m(k+1) - i) \\
&= \sum_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} m_{i,j}^{l,m} (l + i_k - m(k+1) - i) \\
&= q_{l,m} [l + i_k - m(k+1)] - \|M_{l,m}\|_1
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$b_{l,m}^{q_{l,m}} = \left(\frac{-1}{\omega_0}\right)^{q_{l,m}} \sum_{|M_{l,m}|=q_{l,m}, \|M_{l,m}\|_2 \geq m q_{l,m}} A^{M_{l,m}} \sum_{\substack{|U_{l,m}|=\|M_{l,m}\|_2 - m q_{l,m} \\ \|U_{l,m}\|=q_{l,m}[l+i_k - m(k+1)] - \|M_{l,m}\|_1}} d_{U_{l,m}} C^{U_{l,m}}$$

$$\text{où } d_{U_{l,m}} := \sum_{\substack{N_{i,j}^{l,m} \\ i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \frac{q_{l,m}!}{\prod N_{i,j}^{l,m}!} \prod_{i=0,\dots,d_x} \prod_{j=m,\dots,d_y} \prod_{u=1}^{\alpha_{i,j}} \left(\frac{j!}{m! L_u!}\right)^{n_{i,j,u}^{l,m}}$$

$$\text{où la somme est prise sur } \left\{ \left(N_{i,j}^{l,m}\right)_{\substack{i=0,\dots,d_x \\ j=m,\dots,d_y}} \text{ tels que } |N_{i,j}^{l,m}| = m_{i,j}^{l,m} \text{ et } \sum_{i=0,\dots,d_x} \sum_{j=m,\dots,d_y} n_{i,j,u}^{l,m} L_u = U_{l,m} \right\}.$$

On en déduit que :

$$B^Q = \prod_{l=1,\dots,(k+1)d_y+d_x-i_k, m=0,\dots,m_l} b_{l,m}^{q_{l,m}}$$

$$= \left(\frac{-1}{\omega_0}\right)^q \prod_{l,m} \left[\sum_{|M_{l,m}|=q_{l,m}, \|M_{l,m}\|_2 \geq m q_{l,m}} A^{M_{l,m}} \sum_{\substack{|U_{l,m}|=\|M_{l,m}\|_2 - m q_{l,m} \\ \|U_{l,m}\|=q_{l,m}[l+i_k - m(k+1)] - \|M_{l,m}\|_1}} d_{U_{l,m}} C^{U_{l,m}} \right]$$

On pose $S := \sum_{l,m} M_{l,m}$. Donc $|S| = \sum_{l,m} q_{l,m} = q$ et $\|S\|_2 \geq \sum_{l,m} m q_{l,m} = \|Q\|_2 = q - 1$. De plus, à S fixé, on pose $T_S := \sum_{l,m} U_{l,m}$. Donc $|T_S| = \sum_{l,m} \|M_{l,m}\|_2 - m q_{l,m} = \|S\|_2 - \|Q\|_2 = \|S\|_2 - q + 1$, et :

$$\begin{aligned} \|T_S\| &= \sum_{l,m} q_{l,m} [l + i_k - m(k+1)] - \|M_{l,m}\|_1 \\ &= \|Q\|_1 + |Q| i_k - \|Q\|_2 (k+1) - \|S\|_1 \\ &= p + q i_k - (q-1)(k+1) - \|S\|_1 \end{aligned}$$

Ainsi, comme souhaité :

$$\sum_{|Q|=q, \|Q\|_1=p, \|Q\|_2=q-1} \frac{q!}{Q!} B^Q = \left(\frac{-1}{\omega_0}\right)^q \sum_{|S|=q, \|S\|_2 \geq q-1} A^S \sum_{\substack{|T_S|=\|S\|_2 - q + 1 \\ \|T_S\|=p + q i_k - (q-1)(k+1) - \|S\|_1}} e_{T_S} C^{T_S}$$

$$\text{où } e_{T_S} := \sum_{\substack{N_{i,j}^{l,m} \\ l,m}} \frac{q!}{\prod \prod N_{i,j}^{l,m}!} \prod_{l,m} \prod_{i,j} \prod_u \left(\frac{j!}{m! L_u!}\right)^{n_{i,j,u}^{l,m}} \text{ et où la somme est prise sur}$$

$$\left\{ \left(N_{i,j}^{l,m}\right)_{\substack{l=1,\dots,(k+1)d_y+d_x-i_k, m=0,\dots,m_l \\ i=0,\dots,d_x, j=m,\dots,d_y}} \text{ tels que } \sum_{l,m} \sum_{i,j} |N_{i,j}^{l,m}| = q \text{ et } \sum_{l,m} \sum_{i,j} \sum_{u=1}^{\alpha_{i,j}} n_{i,j,u}^{l,m} L_u = T_S \right\}.$$

□

Remarque 4.7. Nous avons vu dans le Théorème 4.4 et sa preuve que $\omega_0 = \pi'_{k_0, i_{k_0}}(c_{k_0+1})$ est le coefficient du monôme $x^{i_{k_0}+1}y$ dans $P_{k_0+1}(x, y) = P(x, c_1x + \dots + c_{k_0+1}x^{k_0+1} + x^{k_0+2}y)$, et que $c_{k_0+2} = \frac{-\pi_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1})}{\omega_0}$ où $\pi_{k_0, i_{k_0}+1}(c_{k_0+1})$ est le coefficient de $x^{i_{k_0}+1}$. En développant

$P_{k_0+1}(x, y)$, on en déduit, tous calculs faits, que :

$$\begin{cases} \omega_0 &= \sum_{i=0, \dots, d_x, j=0, \dots, d_y} \sum_{|L|=j, \|L\|=i_{k_0}+1-i} \frac{j!}{L!} a_{i,j} C^L \\ c_{k_0+2} &= \frac{-1}{\omega_0} \sum_{i=0, \dots, d_x, l=0, \dots, d_y-1} \sum_{|L|=l, \|L\|=i_{k_0}+k_0-i-1} \frac{(l+1)!}{L!} a_{i,l+1} C^L \end{cases}$$

Exemple 4.8. Afin d'illustrer le Corollaire 4.6 et sa démonstration, nous reprenons le polynôme de l'Exemple 3.4 :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_{0,2}y^2 + (a_{2,0} + a_{2,1}y + a_{2,2}y^2)x^2 \\ P_0(x, y) &= (a_{2,0} + a_{0,2}y^2)x^2 + a_{2,1}yx^3 + a_{2,2}y^2x^4 \\ P_1(x, y) &= (2a_{0,2}c_1y + a_{2,1}c_1)x^3 + (a_{0,2}y^2 + a_{2,1}y + a_{2,2}c_1^2)x^4 + 2a_{2,2}c_1yx^5 + a_{2,2}y^2x^6 \\ &\quad \text{avec } a_{2,0} + a_{0,2}c_1^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \pm \sqrt{\frac{-a_{2,0}}{a_{0,2}}} \end{aligned}$$

Ainsi, $i_0 = 2$, $i_1 = 3 = i_0 + 1$, et donc $k_0 = 0$, $\omega_0 = 2 a_{0,2} c_1$. Le coefficient c_2 doit vérifier $2a_{0,2}c_1c_2 + a_{2,1}c_1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{-a_{2,1}}{2a_{0,2}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \omega_0 R_1 &= \omega_0 y + (a_{2,2}c_1^2 + a_{2,1}c_2 + a_{0,2}c_2^2 + (a_{2,1} + 2 a_{0,2}c_2)y + a_{0,2}y^2)x + \\ &\quad (2 a_{2,2}c_1c_2 + 2 a_{2,2}c_1y)x^2 + (a_{2,2}c_2^2 + 2 a_{2,2}c_2y + a_{2,2}y^2)x^3 \end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation hensélienne réduite correspondante $y = Q_1(x, y)$ sont donc :

$$\begin{aligned} b_{1,0} &= -(a_{2,2}c_1^2 + a_{2,1}c_2 + a_{0,2}c_2^2)/\omega_0 & b_{1,1} &= -(a_{2,1} + 2 a_{0,2}c_2)/\omega_0 = 0 \\ b_{1,2} &= -a_{0,2}/\omega_0 & b_{2,0} &= -2 a_{2,2}c_1c_2/\omega_0 & b_{2,1} &= -2 a_{2,2}c_1/\omega_0 \\ b_{3,0} &= -a_{2,2}c_2^2/\omega_0 & b_{3,1} &= -2 a_{2,2}c_2/\omega_0 & b_{3,2} &= -a_{2,2}/\omega_0 \end{aligned}$$

Or, d'après la version 2.4 de la formule de Flajolet-Soria 2.3, on a :

$$\begin{aligned} c_3 &= b_{1,0} = \frac{-a_{2,2}c_1^2 - a_{2,1}c_2 - a_{0,2}c_2^2}{2 a_{0,2} c_1} \\ c_4 &= b_{2,0} + b_{1,0}b_{1,1} = b_{2,0} = \frac{-2 a_{2,2}c_1c_2}{2 a_{0,2} c_1} \\ c_5 &= b_{3,0} + b_{1,0}b_{2,1} + b_{1,0}^2b_{1,2} + b_{1,0}b_{1,1}^2 + b_{2,0}b_{1,1} = b_{3,0} + b_{1,0}b_{2,1} + b_{1,0}^2b_{1,2} \\ &= \frac{-a_{2,2}c_2^2}{2 a_{0,2} c_1} + \frac{2 a_{2,1}a_{2,2}c_1c_2 + 2 a_{0,2}a_{2,2}c_1c_2^2 + 2 a_{2,2}^2c_1^3}{(2 a_{0,2} c_1)^2} - \\ &\quad \frac{a_{0,2}a_{2,1}^2c_2^2 + 2 a_{0,2}^2a_{2,1}c_2^3 + 2 a_{0,2}a_{2,1}a_{2,2}c_1^2c_2 + a_{0,2}^3c_2^4 + 2 a_{0,2}^2a_{2,2}c_1^2c_2^2 + a_{0,2}a_{2,2}^2c_1^4}{(2 a_{0,2} c_1)^3} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Remarque 4.9. Il est classique qu'une série $y_0 = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \in K[[x]]$ est algébrique si et seulement si ses coefficients c_n sont les coefficients diagonaux du développement en série d'une fraction rationnelle de 2 variables [Fur67, DL87]. En particulier, dans le cas hensélien réduit $y = Q(x, y)$ (voir 2.2), la fraction rationnelle s'écrit :

$$y_0 = \text{Diag} \left(\frac{y^2 - y^2 \frac{\partial Q}{\partial y}(xy, y)}{y - Q(xy, y)} \right)$$

D'après les calculs de la preuve du Corollaire 4.6, on peut en déduire dans le cas général $P(x, y) = 0$ une formule pour la fraction rationnelle dont les coefficients diagonaux du développement sont les c_n .

RÉFÉRENCES

- [BCS⁺07] A. Bostan, F. Chyzak, B. Salvy, G. Lecerf, and E. Schost, *Differential equations for algebraic functions*, ISSAC 2007, ACM, New York, 2007, pp. 25–32.
- [BD13] C. Banderier and M. Drmota, *Coefficients of algebraic functions : formulae and asymptotics.*, Proceedings of the 25th international conference on formal power series and algebraic combinatorics, FPSAC 2013, Paris, France, June 24–28, 2013, Nancy : The Association. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science (DMTCS), 2013, pp. 1065–1076.
- [CC86] D.V. Chudnovsky and G.V. Chudnovsky, *On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. I.*, J. Complexity **2** (1986), 271–294.
- [CC87] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. II.*, J. Complexity **3** (1987), no. 1, 1–25.
- [Com64] L. Comtet, *Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique*, Enseignement Math. (2) **10** (1964), 267–270.
- [DL87] J. Denef and L. Lipshitz, *Algebraic power series and diagonals*, J. Number Theory **26** (1987), no. 1, 46–67.
- [FS] P. Flajolet and M. Soria, *Coefficients of algebraic series*, Algorithms seminar 1997-1998, Tech. Report, INRIA, pp. 27–30.
- [FS09] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Fur67] H. Furstenberg, *Algebraic functions over finite fields*, J. Algebra **7** (1967), 271–277.
- [GKZ94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.*, Boston, MA : Birkhäuser, 1994.
- [Hen64] P. Henrici, *An algebraic proof of the Lagrange-Bürmann formula*, J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 218–224.
- [RvdD84] P. Ribenboim and L. van den Dries, *The absolute Galois group of a rational function field in characteristic zero is a semidirect product*, Canad. Math. Bull. **27** (1984), no. 3, 313–315.
- [Sin80] M. F. Singer, *Algebraic solutions of nth order linear differential equations*, Proceedings of the Queen's Number Theory Conference, 1979 (Kingston, Ont., 1979), Queen's Papers in Pure and Appl. Math., vol. 54, Queen's Univ., Kingston, Ont., 1980, pp. 379–420.
- [Sta78] R. P. Stanley, *Generating functions.*, MAA Stud. Math. 17, Studies in Combinatorics, 100-141 (1978), 1978.
- [Sta99] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.
- [vdP93] A. J. van der Poorten, *Power series representing algebraic functions*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, Progr. Math., vol. 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, pp. 241–262.
- [Wal78] R. J. Walker, *Algebraic curves*, Springer-Verlag, New York, 1978, Reprint of the 1950 edition.
- [Wil19] E. J. Wilczynski, *On the form of the power series for an algebraic function.*, Am. Math. Mon. **26** (1919), 9–12.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, IMB INSTITUT MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX, 351 COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE CEDEX, FRANCE

E-mail address: michel.hickel@math.u-bordeaux1.fr, mickael.matusinski@math.u-bordeaux1.fr